ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
————-

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ I
NĂM HỌC 2011-2012
——oOo——-

Môn thi: Hàm suy rộng

Mã môn học: **MAT3014** Số tín chỉ: **2** Đề số: **1**

Dành cho sinh viên khoá: **Lớp K53A1T** Ngành học: **Toán học**

Thời gian làm bài **90 phút** (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (6 điểm) Cho hàm $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{khi } |x| < 1, \\ 0 & \text{khi } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Khảo sát sự hội tụ trong không gian $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ của các dãy sau:

(i) dãy $\{n^{-2011}\rho(2n(x - \frac{1}{n}))\}_{n=1}^{\infty}$,

(ii) dãy $\{ne^{-n/2}\rho(2n(x - \frac{1}{n}))\}_{n=1}^{\infty}$.

Chứng minh rằng

$$\int_{\mathbb{R}} e^{1/x} ne^{-n/2}\rho(2n(x - \frac{1}{n}))dx > \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\rho(x)dx.$$

Từ đó rút ra kết luận gì?

Bài 2. (4 điểm) Cho hàm $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ được xác định như sau:

$$\langle f, \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} (x + y^2)\varphi(x, y)dxdy.$$

Chứng minh rằng:

(i) $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$,

(ii) $f \in S'(\mathbb{R}^2)$,

(iii) $f \notin \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$.

Bài 3. (2 điểm) Cho $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng $\varphi \in W^k(\mathbb{R})$ với bất kỳ số tự nhiên k.

Chú ý: Thí sinh được sử dụng mọi tài liệu. Không được sử dụng tài liệu của thí sinh khác.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ I, NĂM HỌC 2011-2012
Môn thi: Hàm suy rộng

Mã môn học: **MAT3014** Số tín chỉ: **2** Đề số: **1**
Dành cho sinh viên khoá: **Lớp K53A1T** Ngành học: **Toán học**

Lời giải 1. [**6** điểm]

(i) Tính đạo hàm $D^{2012}(n^{-2011}\rho(2n(x-\frac{1}{n}))) = 2^{2012}n(D^{2011}\rho)(2n(x-\frac{1}{n}))$.	**1**
Ước lượng $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \lvert D^{2012}(n^{-2011}\rho(2n(x-\frac{1}{n})))\rvert$. Từ đó kết luận không hội tụ.	**1**
(ii) Tính đạo hàm $D^k(ne^{-n/2}\rho(2n(x-\frac{1}{n}))) = 2^k n^{k+1}e^{-n/2}(D^k\rho)(2n(x-\frac{1}{n}))$. Có $supp(ne^{-n/2}\rho(2n(x-\frac{1}{n}))) \subset [0,2]$.	**1**
Ước lượng $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \lvert D^k(ne^{-n/2}\rho(2n(x-\frac{1}{n})))\rvert$. Từ đó kết luận hội tụ.	**1**
Lưu ý $supp(ne^{-n/2}\rho(2n(x-\frac{1}{n}))) \subset [\frac{1}{2n},\frac{3}{2n}]$ nên $$\int_{\mathbb{R}} e^{1/x}ne^{-n/2}\rho(2n(x-\frac{1}{n}))dx = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{3}{2n}} e^{1/x}ne^{-n/2}\rho(2n(x-\frac{1}{n}))dx.$$ Từ đó rút ra đánh giá.	**1**
Từ đây rút ra kết luận không có hàm suy rộng $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ để $$\langle f,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{1/x}\varphi(x)dx, \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}), 0\notin supp\varphi.$$	**1**

Lời giải 2. [**4** điểm]

i) Viết lại công thức xác định f dưới dạng tích phân xác định và kiểm tra tính tuyến tính.	**1**
Kiểm tra tính liên tục	**1**
ii) Có đánh giá $\lvert x+y^2\rvert \le \lvert 1+x^2+y^2\rvert \le (1+x^2)(1+y^2) \le (1+x^2+y^2)^2$	**0.5**
nên $$\begin{aligned}\lvert\langle f,\varphi\rangle\rvert &\le \iint_{\mathbb{R}^2}(1+x^2)^{-1}(1+y^2)^{-1}(1+x^2+y^2)^3\lvert\varphi(x,y)\rvert dxdy\\ &\le \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}(1+x^2+y^2)^3\lvert\varphi(x,y)\rvert \iint_{\mathbb{R}^2}(1+x^2)^{-1}(1+y^2)^{-1}dxdy.\end{aligned}$$ Từ đó rút ra kết luận.	**0.5**
iii) Dãy điểm $\{(n,n)\}_{n=1}^{\infty}$ không nằm trong giá của f vì với mỗi điểm (n,n) và lân cận $B_{1/k}(n,n)$ đều có hàm $$\varphi_{n,k}(x,y) = \rho(2k(x-n),2k(y-n))$$ để $\langle f,\varphi_{n,k}\rangle > 0$.	**0.5**
Từ đó rút ra kết luận.	**0.5**

Lời giải 3. [**2** điểm]

Cố định $k \in \mathbb{N}$. Có $\mathcal{F}\varphi \in S(\mathbb{R})$ nên $$(1+\xi^2)^{k+1}\|\mathcal{F}\varphi(\xi)\| \le C_k.$$	**1**
Từ đó $$(1+\xi^2)^k\|\mathcal{F}\varphi(\xi)\|^2 \le \frac{C_k}{(1+\xi^2)}.$$ Ta dẫn đến điều phải chứng minh.	**1**

Hà nội, ngày 19 tháng 12 năm 2011
NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
(ký và ghi rõ họ tên)

TS. Đặng Anh Tuấn